

Berlyn 1969

E. Tränkle



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550807_0110

DER CDD-POL IN DER ZWEIKANALSTREUUNG

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin



vorgelegt von

Eberhard Tränkle

aus Stuttgart

DER ERM. HERRN DR. THEOD. G. V. B. 1790

ANATOMIE DES MENSCHEN

1790

ANATOMIE DES MENSCHEN

1790

ANATOMIE DES MENSCHEN

ANATOMIE DES MENSCHEN



ANATOMIE DES MENSCHEN

ANATOMIE DES MENSCHEN

ANATOMIE DES MENSCHEN

Referenten:

Prof. Dr. F. PENZLIN

Prof. Dr. W. THEIS

Datum der mündlichen Prüfung:

14. Februar 1968

Tag der Promotion:

1. DEZ. 1969

Der CDD-Pol in der Zweikanalstreuung^{*}

E. TRÄNKLE

Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin

Eingegangen am 18. Juni 1969

A Dynamical CDD Pole in the Two Channel Scattering

Comparing the inelastic one channel N/D method of Frye and Warnock, and the many channel matrix N/D method of Bjorken it is shown, that for a large class of many channel models the solution of the Bjorken method is a solution of the Frye Warnock method. We demonstrate at a simple model of the two channel scattering, that one dynamical CDD pole exists in the Frye Warnock method.

I. Einleitung

Das N/D-Verfahren wurde von Omnes¹ sowie Chew und Mandelstam² für die elastische Streuung entwickelt. Castillejo, Dalitz, Dyson³ haben die nach ihnen benannten CDD-Pole in der elastischen Streuung eingeführt. Frye und Warnock⁴ sowie Bjorken⁵ haben das N/D-Verfahren erweitert, um inelastische Effekte zu berücksichtigen. Das Matrix-N/D-Verfahren von Bjorken (B.-Verfahren) beschreibt die Ankopplung weiterer Kanäle. CDD-Pole sind im B.-Verfahren nicht berücksichtigt. Im Einkanal-N/D-Verfahren von Frye und Warnock (F.W.-Verfahren) ist die elastische durch die inelastische Unitarität ersetzt, wobei der Elastizitätsgrad η (der Betrag des S -Matrixelements) vorzugeben ist, d. h. zum Input des Rechenverfahrens zählt. Im F.W.-Verfahren werden CDD-Pole eingeführt, wobei die Polstelle reell ist und an $m\pi$ -Durchgängen der Streuphase liegt. Die Anzahl, die Polstelle und das Residuum der CDD-Pole sind vorzugebende Parameter der Rechnung.

Es stellt sich die Frage, ob die Lösung des B.-Verfahrens stets Lösung des F.W.-Verfahrens ist, wenn man den Elastizitätsgrad und die CDD-Parameter aus der Mehrkanalstreuung entnimmt.

In mehreren Arbeiten⁶⁻⁹ wird an Modellen der Zweikanalstreuung demonstriert, daß es Lösungen des B.-Verfahrens gibt, die nicht Lösungen

^{*} D 188.

1. Omnes, R.: *Nuovo Cimento* **8**, 316 (1958).
2. Chew, G. F., and S. Mandelstam: *Phys. Rev.* **119**, 467 (1960).
3. Castillejo, L., and R. H. Dalitz: *Phys. Rev.* **101**, 453 (1956).
4. Frye, F., and R. L. Warnock: *Phys. Rev.* **130**, 478 (1965).
5. Bjorken, J. D.: *Phys. Rev. Letters* **4**, 473 (1960).
6. Bander, M., P. W. Coulter, and G. L. Shaw: *Phys. Rev. Letters* **14**, 270 (1965).
7. Hartle, J. B., and C. E. Jones: *Phys. Rev. Letters* **14**, 801 (1965).
8. Heiss, D.: *Nuovo Cimento* **52**, 1201 (1967).
9. Squires, E. J.: *Nuovo Cimento* **34**, 1751 (1964).

des F.W.-Verfahrens sind. Die Autoren lassen allerdings die CDD-Pole im F.W.-Verfahren außer Betracht, obwohl die Struktur der abweichenden Lösung des B.-Verfahrens (Nullstellen des Matricelements S_{11} auf dem physikalischen Blatt) darauf hindeutet, daß ein CDD-Pol im F.W.-Verfahren die Diskrepanz der beiden Lösungen aufheben könnte.

Die Integralgleichung des inelastischen Einkanalverfahrens ist eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art, wenn der Input verschiedene Einschränkungen erfüllt. In Kapitel II diskutieren wir diese Einschränkungen für den Elastizitätsgrad $\bar{\eta}$ aus der Mehrkanalstreuung. Die Eigenschaft, daß $\bar{\eta}$ asymptotisch den elastischen Wert eins annimmt, ist nahezu notwendig und für eine große Klasse von Modellen der Mehrkanalstreuung — abgesehen von dem Fall, daß $\bar{\eta}$ Nullstellen hat — hinreichend für die Durchführung des Frye-Warnock-Verfahrens. Hat $\bar{\eta}$ eine Nullstelle, so ist die Einschränkung verletzt. Die damit verbundene Mehrdeutigkeit der Lösung hängt mit dem Auftreten eines CDD-Poles zusammen und gestattet, die Lösung ohne CDD-Pol an die mit CDD-Pol anzuschließen.

In Kapitel III führen wir über die Unitarität der Mehrkanalstreuung den Elastizitätsgrad $\bar{\eta}$ des Matricelements T_{11} ein. Für den einfachsten Fall zweier Streukanäle gilt

$$1 - \bar{\eta}^2 = 4\rho_1\rho_2 |T_{12}|^2.$$

Der Elastizitätsgrad $\bar{\eta}$ ist also Teil der Lösung des B.-Verfahrens und beschreibt den inelastischen Einfluß des angekoppelten Kanals.

In Kapitel IV konstruieren wir die N - und D -Funktion des inelastischen Einkanalverfahrens

$$N = (N_{11}D_{22} - N_{12}D_{21})F$$

$$D = (D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21})F$$

aus der N_{ik} - und D_{ik} -Funktion des B.-Verfahrens, wobei F nur den inelastischen Schnitt hat.

Den Zusammenhang zwischen der Anzahl und Ursache der im F.W.-Verfahren auftretenden CDD-Pole und der Struktur der Lösung des B.-Verfahrens formulieren wir in Kapitel V an einem einfachen Modell der Zweikanalstreuung: Es gilt das Levinson-Theorem

$$\delta(\infty) = (-n_B + n_{\text{CDD}})\pi,$$

und die Anzahl der CDD-Pole ist 0 oder 1. Die dynamische Ursache des CDD-Poles ist ein gebundener Zustand im angekoppelten Kanal.

Die Berechnung der p_{11} -Streuphase der π -N-Streuung ist ein Beispiel dafür, welche Folgen der CDD-Pol für die praktische Rechnung hat. Die experimentelle Streuphase ist im elastischen Gebiet negativ, geht in

der Nähe der inelastischen Schwelle durch null und steigt dann rasch an¹⁰. Die Berechnung mit Hilfe des F.W.-Verfahrens¹¹, ohne Berücksichtigung von CDD-Polen, ist unbefriedigend; insbesondere gelingt es nicht, gleichzeitig das Nukleon als gebundenen Zustand und den Nulldurchgang der Streuphase auszurechnen. Eine Streuphase mit diesen Eigenschaften erhalten dagegen Bender, Heiß und Tränkle¹² mittels des B.-Verfahrens, wobei sie $\sigma N \rightarrow \sigma N$ als zweiten Streukanal wählen.

II. Das Einkanal-N/D-Verfahren nach Frye und Warnock

Frye und Warnock setzen die folgenden Eigenschaften der Streuamplitude $T(s)$ voraus:

1. $T(s)$ ist reell analytisch ($T(s) = T^*(s^*)$) und regulär in der s -Ebene mit Ausnahme

a) des physikalischen Schnittpunktes $P(s \geq s_1)$. Auf P genügt $T(s)$ der inelastischen Unitarität

$$\operatorname{Im} T = \rho |T|^2 + \frac{1 - \eta^2}{4\rho} \quad (1)$$

mit dem kinematischen Faktor $\rho(s)$ und dem Elastizitätsgrad $\eta(s)$, wobei $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta = 1$ im elastischen Bereich $s_1 \leq s < s_2$. Aus (1) folgt

$$1 + 2i\rho T = \eta e^{2i\delta} \quad (2)$$

mit der reellen Streuphase $\delta(s)$,

b) des unphysikalischen Schnittpunktes U mit dem Sprung $\Delta T(s) = 1/2i(T(s+i0) - T(s-i0))$,

c) von Polen erster Ordnung, die als gebundene Zustände zu interpretieren sind.

2. $T(s)$ hat das asymptotische Verhalten $T(s) = O(|s|^{-1})$.

3. Die Streuphase $\delta(s)$ ist integrierbar und besitzt einen endlichen Grenzwert.

Unter diesen Voraussetzungen zeigen Frye und Warnock, daß eine D -Funktion existiert mit den Eigenschaften:

1. $D(s)$ ist reell analytisch und regulär in der s -Ebene bis auf den Schnitt P mit

$$D(s+i0) = e^{-2i\delta} D(s-i0) \quad (3)$$

10. Roper, L. D., and R. M. Wright: Phys. Rev. **138**, 921 (1965).

11. Coulter, P. W., and G. L. Shaw: Phys. Rev. **141**, 1419 (1966).

12. Bender, I., D. Heiss, and E. Tränkle: Z. Physik **200**, 332 (1967).

und einer Anzahl von CDD-Polen mit reeller Polstelle an $m\pi$ -Durchgängen der Streuphase bzw. Nullstellen von T unterhalb der elastischen Schwelle und vorgegebenem Residuum.

2. $D(s)$ hat das asymptotische Verhalten $D(s) = O(|s|^{1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, daher genügt D einer einfach subtrahierten Dispersionsrelation.

3. $D(s)$ hat Nullstellen an vorgegebenen Punkten, die den gebundenen Zuständen entsprechen.

4. Die Anzahl der CDD-Pole ist minimal, d.h. geht die Streuphase mehrmals mit positiver Steigung durch denselben Wert $m\pi$, so führt man nur an einem dieser Punkte einen CDD-Pol ein. Für die minimale Anzahl gilt $-n_B + n_{\text{CDD}} \leq \delta(\infty)/\pi < -n_B + n_{\text{CDD}} + 1$.

Hiermit läßt sich für die Funktion $N \equiv T \cdot D$ ableiten:

1. $N(s)$ ist reell analytisch und regulär bis auf den unphysikalischen Schnitt U mit

$$\text{Im } N = \Delta T \cdot D, \quad (4)$$

und den inelastischen Schnitt $I (s \geq s_2)$ mit

$$2\rho \text{ Re } N = -(1 + \eta) \text{ Im } D \quad \text{auf } P, \quad (5)$$

$$2\rho \text{ Im } N = (1 - \eta) \text{ Re } D \quad \text{auf } I. \quad (6)$$

2. $N(s)$ hat das asymptotische Verhalten $N(s) \rightarrow 0$.

Unter diesen Umständen und unter schwachen Voraussetzungen über die Glattheit und das asymptotische Verhalten der Funktionen ΔT , ρ , η gelten die folgenden Dispersionsrelationen

$$N(s) = \frac{1}{\pi} \int_U ds' \frac{\Delta T(s') D(s')}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_I ds' \frac{[1 - \eta(s')] \text{ Re } D(s')}{2\rho(s')(s' - s)}, \quad (7)$$

$$D(s) = 1 - \frac{s}{\pi} \left\{ \int_P ds' \frac{2\rho(s') \text{ Re } N(s')}{[1 + \eta(s')] s'(s' - s)} + \sum_{i=1}^{n_{\text{CDD}}} \frac{R_i}{s - s_i} \right\}. \quad (8)$$

Gl. (7) und (8) ist ein System gekoppelter Integralgleichungen. Es läßt sich nach Frye und Warnock umformen

$$\begin{aligned} -\frac{\eta(s)}{\rho(s)} \text{ Im } D(s) &= \text{Re } B(s) + \sum_{i=1}^{n_{\text{CDD}}} R_i \frac{s \text{ Re } B(s) - s_i \text{ Re } B(s_i)}{s - s_i} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_P ds' \frac{\text{Im } D(s')}{s'(s - s')} [s' \text{ Re } B(s') - s \text{ Re } B(s)], \end{aligned} \quad (9)$$

mit

$$\operatorname{Re} B(s) = \frac{1}{\pi} \int_0 \! \! \! \int d s' \frac{\Delta T(s')}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_i d s' \frac{1 - \eta(s')}{2 \rho(s')(s' - s)}.$$

Frye und Warnock diskutieren nun den Fall, daß diese Integralgleichung vom Fredholmschen Typ ist. Dies trifft zu, wenn die Fredholmdeterminante nicht verschwindet und der Input die Bedingungen

$$\begin{aligned} \int_P d s' \frac{\rho(s')}{\eta(s') s'} [\operatorname{Re} B(s')]^2 &< \infty, \\ \int_P \int_P d s' d s \frac{\rho(s) \rho(s')}{\eta(s) \eta(s') s s'} \left[\frac{s \operatorname{Re} B(s) - s' \operatorname{Re} B(s')}{s - s'} \right]^2 &< \infty \end{aligned} \quad (10)$$

erfüllt. Die Lösung der Fredholmschen Integralgleichung ist eindeutig bestimmt und quadratintegrierbar. Für vorgegebenen Input ρ , η , ΔT hängt die Lösung noch von den CDD-Parametern ab. Gibt man zusätzlich die CDD-Parameter n_{CDD} , s_i , R_i vor, dann ist die Streuamplitude festgelegt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Fredholmschen Integralgleichung ist die Lösung dann auch eindeutig fixiert.

Da die homogene Integralgleichung vermutlich keine physikalische Bedeutung besitzt, ist auch das Verschwinden der Fredholmdeterminante ohne Bedeutung.

Wenn bei hohen Energien die inelastischen Prozesse überwiegen, verschwindet η und die Konvergenz der Integrale (10) ist in Frage gestellt.

Fällt der Beitrag eines einzelnen inelastischen Prozesses zur Inelastizität $1 - \eta^2$ mit wachsender Energie rasch ab und wächst die Zahl der inelastischen Prozesse gleichzeitig nicht stark an, so kann der elastische Prozeß überwiegen und η nimmt asymptotisch den elastischen Wert eins an. Dem B.-Verfahren liegt offensichtlich eine solche Vorstellung zugrunde. Unter schwachen Einschränkungen für den Input läßt sich zeigen, daß $\lim_{s \rightarrow \infty} \eta = 1$, falls nur endlich viele Kanäle angekoppelt sind.

Der asymptotische Wert von η ist somit unabhängig von der speziellen Wahl des Inputs, dagegen hängt das Ansteigen gegen den asymptotischen Wert vom Input ab.

Der Input soll der Bedingung (10) genügen. Für eine spezielle Wahl des Inputs läßt sich immer prüfen, ob (10) erfüllt ist. Frye und Warnock haben Einschränkungen für das asymptotische Verhalten des Inputs angegeben, die für (10) hinreichend und fast auch notwendig sind. Für den Fall, daß η asymptotisch den elastischen Wert eins annimmt, sind diese Einschränkungen besonders einfach:

Hat $\operatorname{Re} B$ die Form $s \cdot \operatorname{Re} B = a + \Phi(s)$ mit der Konstanten a , dann ist die gleichmäßige Konvergenz des Doppelintegrals in der s, s' -Ebene in Frage gestellt, wenn nicht

$$\Phi(s) = o(1) \quad (11)$$

gilt. Verschwindet Φ asymptotisch und hat Φ eine stetige erste Ableitung, so läßt sich zeigen, daß das Doppelintegral konvergiert, wenn $\rho(s) = O(s^\alpha)$, $\alpha < 1$. Da die Konvergenz des einfachen Integrals notwendig für die Konvergenz des Doppelintegrals ist, ist unter dieser Einschränkung die Bedingung (10) erfüllt.

Verschwindet Φ asymptotisch nicht, so ist die Konvergenz des Doppelintegrals nur dann möglich, wenn sich $\Phi(s)$ und $\Phi(s')$ gegenseitig wegheben. Da nicht ersichtlich ist, daß $\Phi(s)$ mit Ausnahme von sehr speziellen Funktionen ein solches Verhalten zeigt, ist die Bedingung (11) praktisch auch notwendig für (10).

Das Verschwinden von Φ ist keineswegs gesichert. $\operatorname{Re} B$ hat die Form $\operatorname{Re} B = \operatorname{Re} B_U + \operatorname{Re} B_I$. Hinreichend für (11) ist, daß die Beiträge vom unphysikalischen und inelastischen Schnitt einzeln diese Bedingungen erfüllen. Φ verschwindet aber auch, wenn $\operatorname{Re} B_I$ und $\operatorname{Re} B_U$ einzeln (11) nicht befriedigen, die schwach abfallenden Glieder von $\operatorname{Re} B_I$ und $\operatorname{Re} B_U$ sich jedoch gerade gegenseitig aufheben. Da ein solches Verhalten jedoch allenfalls für eine sehr spezielle Wahl des Inputs auftritt, ist dieser Fall für die Anwendung ohne Bedeutung.

Aus einem bekannten Theorem für das asymptotische Verhalten von Hauptwertintegralen⁴ folgt: Ist $\rho(s) = O(s^\alpha)$, $1 - \eta(s) = O(s^{-\beta})$, $\alpha + \beta > 0$, so gilt für $\operatorname{Re} B_I$

$$\operatorname{Re} B_I(s) \equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_1 d s' \frac{1 - \eta(s')}{2 \rho(s')(s' - s)} = O(s^{-(\alpha + \beta)}).$$

Folglich ist die Bedingung (11) für $\operatorname{Re} B_I$ erfüllt, wenn

$$\alpha + \beta > 1, \quad (12)$$

wobei α noch der Einschränkung $\alpha < 1$ unterliegt.

Für den von der Anwendung her wichtigen Fall, daß η asymptotisch nicht den elastischen Wert annimmt, ist (12) verletzt, so daß das F.W.-Verfahren sehr wahrscheinlich nicht anwendbar ist.

Die Ungleichung (12) ist für den Elastizitätsgrad aus einem Mehrkanalverfahren erfüllbar. Ein Beispiel ist das Modell der Zweikanalstreuung aus Kapitel V mit $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$. Der Sprung ΔT unterliegt im B.-Verfahren einer ähnlichen Einschränkung wie im F.W.-Verfahren. Die Modellunabhängigkeit ist jedoch nicht gesichert, da (12) vom Anstieg

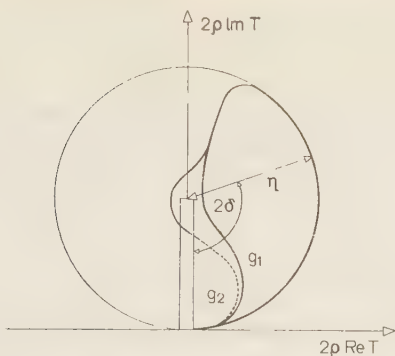


Fig. 1. Die Nullstelle des Elastizitätsgrads ($g_1 < \bar{g} < g_2$)

des Elastizitätsgrads gegen den asymptotischen Wert abhängt. Das F.W.-Verfahren ist somit für eine große Klasse von Modellen der Mehrkanalstreuung anwendbar.

Im niederenergetischen Bereich tragen zur Inelastizität meist nur wenige Prozesse bei. Öffnet sich ein neuer Kanal, so wird der Elastizitätsgrad η kurz hinter dieser Schwelle abfallen. Fällt der inelastische Prozeß selbst rasch ab, so steigt η wieder an und zeigt die Struktur eines dips nahe oberhalb der betreffenden Schwelle. Die Tiefe des dips hängt zweifellos von der Ankopplung des betreffenden Kanals und dessen Dynamik ab.

Beschreiben wir die Stärke der beiden dynamischen Einflüsse durch eine Kopplungskonstante g , so erwarten wir folgendes Bild: Für $g=0$ hat der Elastizitätsgrad keinen dip, bei wachsendem g prägt sich ein dip aus. Bei einem Wert $g=\bar{g}$ erreicht das Minimum des dips die untere Grenze Null des Wertebereichs von η , d.h. der Elastizitätsgrad hat eine Nullstelle im Endlichen. An einer Nullstelle von η ist die Streuphase unbestimmt. Fig. 1 illustriert das Verhalten der Lösung in der Nähe von $\bar{g}$.

Hat η eine Nullstelle im Endlichen, so ist die Bedingung (10) verletzt, insbesondere ist die Eindeutigkeit der Lösung der Integralgleichung nicht garantiert. Eine Mehrdeutigkeit der Lösung für $g=\bar{g}$ gestattet, die Lösung ohne CDD-Pol an die Lösung mit einem CDD-Pol anzuschließen: Im elastischen Grenzfall ist die Lösung frei von CDD-Polen. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des F.W.-Verfahrens ist $n_{\text{CDD}}=0$ solange $g<\bar{g}$, für $g=\bar{g}$ ist $n_{\text{CDD}}=0$ bzw. 1, und für $g>\bar{g}$ wird die Lösung im allgemeinen einen CDD-Pol besitzen.

Beschreibt g die Ankopplung und Dynamik von n angekoppelten Kanälen, so ist wegen der Gleichberechtigung der angekoppelten Kanäle zu erwarten, daß es mindestens n Werte von g gibt, für die η eine Nullstelle hat und sich die Anzahl der CDD-Pole um eins erhöht. Somit sind

in einem F.W.-Verfahren, dessen Elastizitätsgrad η den Einfluß von n angekoppelten Kanälen beschreibt, mindestens n CDD-Pole zu berücksichtigen.

Die Streuamplitude sollte eine glatte Funktion der Kopplungskonstanten g sein. Die Glattheit ist am Anschluß der beiden Lösungen in Frage gestellt, wenn das Residuum des CDD-Pols für $g \rightarrow \bar{g}$ nicht verschwindet.

Im F.W.-Verfahren liegt die Polstelle s_i des CDD-Pols an einem $m\pi$ -Durchgang der Streuphase und somit an Stellen

$$\operatorname{Re} T(s_i) = 0, \quad \operatorname{Im} T(s_i) = \frac{1 - \eta(s_i)}{2\rho(s_i)} \quad (13)$$

der Amplitude. Ein einfacher Ausdruck für das Residuum des CDD-Pols ist

$$R_i = \frac{2\eta}{1+\eta} \frac{\operatorname{Re} N}{\left. \frac{d}{ds} \operatorname{Re} T \right|_{s=s_i}} \quad (14)$$

In Gl. (13) ist eine Nullstelle $\bar{s}$ des Elastizitätsgrads η als Polstelle s_i zugelassen. Das zugehörige Residuum verschwindet, falls nicht zufällig $d/ds \operatorname{Re} T(s_i) = 0$ gilt. Damit ist gezeigt, daß ein glatter Anschluß der beiden Lösungen möglich ist. Der Anschluß erfolgt glatt, wenn der CDD-Pol für $g \rightarrow \bar{g}$ in die Nullstelle des Elastizitätsgrads rückt. Ein solches Verhalten des CDD-Pols ist insbesondere für den Elastizitätsgrad aus der Mehrkanalstreuung zu erwarten, da die Amplitude des B.-Verfahrens eine glatte Funktion in der Kopplungskonstanten ist.

Wie im elastischen Fall sollte die Streuphase auch im inelastischen Einkanalverfahren dem wohlbekannten Levinsontheorem $\delta(\infty) = (-n_B + n_{\text{CDD}})\pi$ genügen. Nach Konstruktion ist $-n_B + n_{\text{CDD}} \leq \delta(\infty)/\pi < -n_B + n_{\text{CDD}} + 1$. Die Streuphase erfüllt also das Levinsontheorem, wenn $\sin \delta(\infty) = 0$, oder $\operatorname{Im} D(\infty) = 0$. Die Lösung der Integralgleichung (9) ist quadratintegrierbar

$$\int_P ds \left(\frac{\eta(s) \operatorname{Im} D(s)}{\rho(s)} \right)^2 < \infty.$$

Da $\eta \simeq 1$, $\rho \simeq s^\alpha$, $\alpha < 1$ praktisch notwendig für die Existenz dieser Lösung ist, geht die Streuphase asymptotisch nahezu immer gegen ein ganzzahliges Vielfaches von π und erfüllt somit das Levinsontheorem.

III. Das Mehrkanal-N/D-Verfahren nach Bjorken

Die Mehrkanal-N/D-Rechnung nach Bjorken ist ein Verfahren zur Konstruktion einer Streuamplitude T_{ik} , die bis auf Pole unterhalb der Schwelle s_i in der längs U und P aufgeschnittenen s -Ebene regulär ist

und der Unitarität

$$\operatorname{Im} T_{ik} = T_{ij} \rho_j T_{jk}^* \quad (15)$$

auf P genügt. P ist der physikalische Schnitt ab der Schwelle s_1 . U steht für die unphysikalischen Schnitte. ρ_i ist der kinematische Faktor, der für $s < s_i$ verschwindet.

Die N/D-Zerlegung lautet

$$T_{ik} = N_{ij}(D^{-1})_{jk}, \quad (16)$$

wobei N_{ik} nur den Schnitt U und D_{ik} nur den Schnitt P hat. Somit ergeben sich die Sprungrelationen

$$\operatorname{Im} N_{ik} = (\Delta T)_{ij} D_{jk} \quad \text{auf U}, \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} D_{ik} = -\rho_i N_{ik} \quad \text{auf P}. \quad (18)$$

Im B.-Verfahren wird vorausgesetzt, daß N_{ik} einer unsubtrahierten, D_{ik} einer einmal subtrahierten Dispersionsrelation genügt.

$$N_{ik}(s) = \frac{1}{\pi} \int_U \frac{(\Delta T)_{ij} D_{jk}}{s' - s} ds', \quad (19)$$

$$D_{ik}(s) = \delta_{ik} - \frac{s}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \frac{\rho_i N_{ik}}{s'(s' - s)} ds'. \quad (20)$$

Zum Input der Rechnung zählen die Sprungfunktion $(\Delta T)_{ij}$ und der kinematische Faktor ρ_i . Im Unterschied zum F.W.-Verfahren sind weitere Parameter wie der Elastizitätsgrad oder CDD-Pole im B.-Verfahren nicht zugelassen.

Im folgenden betrachten wir den Spezialfall zweier Streukanäle und insbesondere den Streuprozess, der durch das Matrixelement T_{11} beschrieben wird. Amplitude, Streuphase und Elastizitätsgrad bezeichnen wir mit $\bar{T}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\eta}$, um sie von den entsprechenden Größen des F.W.-Verfahrens zu unterscheiden.

Die Unitarität lautet

$$\operatorname{Im} T_{11} = \rho_1 |T_{11}|^2 + \rho_2 |T_{12}|^2. \quad (21)$$

Sie hat die Form der Beziehung (1), wenn wir

$$1 - \bar{\eta}^2 = 4\rho_1 \rho_2 |T_{12}|^2 \quad (22)$$

setzen. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß $\bar{\eta}$ alle Forderungen an den Elastizitätsgrad erfüllt, wobei die Schwelle s_2 die inelastische Schwelle ist. Somit gilt nach (2)

$$\bar{T} \equiv T_{11} = \frac{\bar{\eta} e^{2i\delta} - 1}{2i\rho_1}$$

mit der reellen Streuphase $\bar{\delta}$. Die Größen $\bar{\eta}$ und $\bar{\delta}$ berechnen sich bei vorgegebener Amplitude aus

$$\bar{\eta}^2 = (2\rho_1 \operatorname{Re} \bar{T})^2 + (1 - 2\rho_1 \operatorname{Im} \bar{T})^2, \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} 2\bar{\delta} = \frac{2\rho_1 \operatorname{Re} \bar{T}}{1 - 2\rho_1 \operatorname{Im} \bar{T}} \quad (24)$$

mit der Festlegung $\bar{\delta}(s_1) = 0$.

Die Beziehung (22) bzw. (23) zeigt, daß mit der Lösung eines vorgegebenen Zweikanalproblems auch der Elastizitätsgrad bekannt ist, und zwar beschreibt $\bar{\eta}$ den inelastischen Einfluß des angekoppelten Kanals auf den Streuprozess T_{11} .

Durch die Lösung eines vorgegebenen Zweikanalproblems ist auch der asymptotische Wert der Streuphase und damit die Anzahl der im F.W.-Verfahren zu berücksichtigenden CDD-Pole festgelegt. Durch die $m\pi$ -Durchgänge der Streuphase sind die Polstellen der CDD-Pole bestimmt, wobei die Eindeutigkeit nicht gesichert ist, wenn die Anzahl der $m\pi$ -Durchgänge der Streuphase mit positiver Steigung größer ist als die Anzahl der CDD-Pole. Mit den Polstellen der CDD-Pole sind auch deren Residuen festgelegt. Mit der Gleichsetzung $\rho = \rho_1$, $\Delta T = \Delta T_{11}$, $\eta = \bar{\eta}$ und den CDD-Parametern sind alle Parameter des F.W.-Verfahrens festgelegt. Die Lösung des B.-Verfahrens eines vorgegebenen Zweikanalproblems ist Lösung des F.W.-Verfahrens, wenn ρ_1 , ΔT_{11} , $\bar{\eta}$ die Einschränkung (10) des F.W.-Verfahrens erfüllt.

IV. Die Konstruktion der N - und D -Funktion des inelastischen Einkanalverfahrens aus der N_{ij} und D_{ij} -Funktion des Bjorken-Verfahrens

Eine Darstellung der D -Funktion des inelastischen Einkanalverfahrens ist die aus dem elastischen Problem bekannte Omnes-Funktion

$$D(s) = \exp \left(-\frac{s}{\pi} \int_p ds' \frac{\delta(s')}{s'(s'-s)} \right), \quad (25)$$

wobei δ die Streuphase der Amplitude des inelastischen Einkanalproblems ist und somit auch die des Zweikanalproblems, wenn dessen Input und Elastizitätsgrad die Einschränkungen des F.W.-Verfahrens erfüllen. Wegen ihrer Allgemeinheit ist (25) jedoch sicher nicht eine für das Zweikanalproblem geeignete Darstellung.

Eine speziell auf das Zweikanalproblem zugeschnittene Darstellung von D ergibt sich automatisch, wenn wir D nicht als Funktion der Amplitude oder deren Phase angeben, sondern die D -Funktion aus der N_{ik} - und D_{ik} -Funktion des Zweikanalverfahrens konstruieren:

Wegen

$$T_{11} = \frac{N_{11} D_{22} - N_{12} D_{21}}{D_{11} D_{22} - D_{12} D_{21}} \quad (26)$$

ist $\bar{N} := N_{11} D_{22} - N_{12} D_{21}$ bzw. $\bar{D} := D_{11} D_{22} - D_{12} D_{21}$ bis auf eine gemeinsame Funktion die N - bzw. D -Funktion des inelastischen Einkanalverfahrens für das Zweikanalproblem. Aus den Eigenschaften der N_{ik} - und D_{ik} -Funktion überträgt sich: $\bar{N}$ ist reell analytisch und regulär in der längs U und wegen dem Schnitt I in D_{2i} auch längs I aufgeschnittenen s -Ebene. $\bar{D}$ ist reell analytisch und regulär in der längs P aufgeschnittenen s -Ebene. $\bar{D}$ hat keine Pole, so daß mögliche CDD-Pole als Nullstellen von $\bar{N}$ auftreten. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß $\bar{N}$ und $\bar{D}$ die Sprungrelation

$$\text{Im } \bar{N} = \Delta T_{11} \cdot \bar{D}$$

des inelastischen Einkanalverfahrens auf dem unphysikalischen Schnitt und die Sprungrelation

$$\text{Im } \bar{D} = -\rho_1 \text{Re } \bar{N}$$

auf dem physikalischen Schnitt unterhalb der inelastischen Schwelle erfüllen.

In Anbetracht dieser Eigenschaften machen wir für N und D den Ansatz

$$\begin{aligned} N &= \bar{N} \cdot F, \\ D &= \bar{D} \cdot F, \end{aligned} \quad (27)$$

wobei F reell analytisch und meromorph in der längs I aufgeschnittenen s -Ebene ist. Mögliche Pole von D sind Pole von F . Da im F.W.-Verfahren N keine Pole hat, sind die Polstellen von F Nullstellen von $\bar{N}$. Die Phase von F ergibt sich aus den Sprungrelationen für N und D oberhalb der inelastischen Schwelle. Mit $\text{Im } F / \text{Re } F = \text{tg}(-\varphi)$ folgt aus (5) bzw. (6)

$$\begin{aligned} (1 + \bar{\eta}) \text{Im } \bar{D} + 2\rho_1 \text{Re } \bar{N} - \{(1 + \bar{\eta}) \text{Re } \bar{D} - 2\rho_1 \text{Im } \bar{N}\} \text{tg } \varphi &= 0, \\ 2\rho_1 \text{Im } \bar{N} - (1 - \bar{\eta}) \text{Re } \bar{D} - \{2\rho_1 \text{Re } \bar{N} + (1 - \bar{\eta}) \text{Im } \bar{D}\} \text{tg } \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Die Verträglichkeit der beiden Gleichungen ist durch die inelastische Unitarität garantiert. Mit

$$1 - \bar{\eta}^2 = \frac{-4\rho_1 \{\rho_1 (\text{Re}^2 \bar{N} + \text{Im}^2 \bar{N}) + \text{Re } \bar{N} \text{Im } \bar{D} - \text{Im } \bar{N} \text{Re } \bar{D}\}}{\text{Re}^2 \bar{D} + \text{Im}^2 \bar{D}} \quad (29)$$

berechnet sich die Phase mittels

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2\rho_1 (\text{Re } \bar{N} \text{Re } \bar{D} - \text{Im } \bar{N} \text{Im } \bar{D}) + 2 \text{Im } \bar{D} \text{Re } \bar{D}}{-2\rho_1 (\text{Re } \bar{N} \text{Im } \bar{D} + \text{Im } \bar{N} \text{Re } \bar{D}) + \text{Re}^2 \bar{D} - \text{Im}^2 \bar{D}} \quad (30)$$

aus den Größen $\bar{N}$ und $\bar{D}$ der Zweikanalrechnung.

Die meromorphe Funktion F hat die Form

$$F(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n_{\text{CDD}}} (s - s_i)} e^{-\frac{s}{\pi} \int \frac{\varphi(s')}{s'(s' - s)} ds'}$$

mit der Phase aus Gl. (30) und der Nullstelle s_i von $\bar{N}$.

Die Konstruktion der N - und D -Funktion des inelastischen Einkanalverfahrens für das Zweikanalproblem läßt sich auf den Fall der n -Kanalstreuung verallgemeinern. Wegen der Gleichberechtigung der angekoppelten Kanäle hat D die Form

$$D = \text{Det } D_{ik} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} F_i,$$

wobei F_i bis auf die CDD-Pole regulär in der längs P , $s \geq s_i$ aufgeschnittenen s -Ebene ist.

V. Ein dynamischer CDD-Pol

Die Anzahl und Ursache der im F.W.-Verfahren zu berücksichtigenden CDD-Pole hängt von der Struktur der Lösung des B.-Verfahrens ab. Wir formulieren den Zusammenhang an einem einfachen Modell der Zweikanalstreuung.

Das Modell beschreibt ein nichtrelativistisches s -Wellensystem, $\rho_i = (s - s_i)^{1/2}$, mit einem einfachen Pol an der Stelle $s = 0$,

$$\Delta T_{ik} = g_{ik} \delta(s).$$

Die Kopplungskonstanten g_{ik} sind positiv und es ist $g_{ik} = g_{ki}$ ($i \neq k$), um die Zeitumkehrinvarianz zu garantieren. Mit diesem Input lassen sich die Dispersionsrelationen (19) und (20) exakt lösen.

$$N_{ik} = \frac{g_{ik}}{s},$$

$$D_{ik} = \delta_{ik} - g_{ik} \varphi_i, \quad (31)$$

wobei

$$\varphi_i(s) = -\frac{1}{2\sqrt{s_i}} + \frac{\sqrt{s_i}}{s} - \frac{\sqrt{s_i - s}}{s}.$$

Wegen der analytischen Form der Lösung lassen sich die folgenden Aussagen durch einfaches Nachrechnen beweisen:

1. $\delta(\infty)$ hat die Form des Levinsontheorems $\delta(\infty) = (-n_B + n) \pi$.
2. Die Anzahl n der CDD-Pole ist 0 oder 1.

3. Die Zuordnung der Polstelle zu den $m\pi$ -Durchgängen der Streuphase bzw. den Nullstellen von $\text{Re } T$ unterhalb der elastischen Schwelle ist eindeutig.

4. Die dynamische Ursache des CDD-Poles ist ein gebundener Zustand im angekoppelten Kanal.

In den Größen $\bar{N}$, $\bar{D}$ berechnet sich die Streuphase nach (24) aus

$$\text{tg } 2\delta = \frac{2\rho_1(\text{Re } \bar{N} \text{ Re } \bar{D} + \text{Im } \bar{N} \text{ Im } \bar{D})}{\text{Re}^2 \bar{D} + \text{Im}^2 \bar{D} + 2\rho_1(\text{Re } \bar{N} \text{ Im } \bar{D} - \text{Im } \bar{N} \text{ Re } \bar{D})}. \quad (32)$$

Unterhalb der inelastischen Schwelle ergibt sich mit $\text{Im } \bar{N} = 0$ und $\text{Im } \bar{D} = -\rho_1 \cdot \bar{N}$ die einfachere Form

$$\text{tg } \delta = \frac{\rho_1 \bar{N}}{\text{Re } \bar{D}}, \quad s < s_2. \quad (33)$$

Im asymptotischen Bereich folgt mit (31) aus (32) $\text{tg } 2\delta \simeq 1/\sqrt{s}$ und aus (29) $1 - \eta \simeq 1/s$. Somit ist $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Im } T / \text{Re } T = 0$ und die Streuphase geht gegen ein ganzzahliges Vielfaches von π .

Im elastischen Grenzfall ($g_{12} = 0$) ist

$$\text{tg } \delta_{\text{el}} = \frac{g_{11} \sqrt{s - s_1}}{s \left(1 + \frac{g_{11}}{2\sqrt{s_1}} + \frac{g_{11} \sqrt{s_1}}{s} \right)}.$$

Da $\text{tg } \delta_{\text{el}}$ keine Nullstelle hat, und von oben gegen $m\pi$ geht, ist $\delta_{\text{el}}(\infty) = 0$ ($-\pi$), wenn die Steigung der Streuphase an der Schwelle positiv (negativ) ist. Das Modell beschreibt höchstens einen gebundenen Zustand, und das Vorzeichen der Steigung der Streuphase hängt von der Existenz des gebundenen Zustandes ab, d. h. $\delta_{\text{el}}(\infty) = -n_B \pi$, $n_B = 0, 1$.

Somit läßt sich $\delta(\infty)$ in der Form des Levinsontheorems $\delta(\infty) = (-n_B + n)\pi$ schreiben. Im F.W.-Verfahren sind CDD-Pole auch unterhalb der elastischen Schwelle an Stellen $\text{Re } T(s_i) = 0$, s_i reell, zugelassen¹³, wenn gleichzeitig ein gebundener Zustand mit $s_B < s_i$ existiert. Durch Abzählen der $m\pi$ -Durchgänge der Streuphase und der Nullstellen von $\text{Re } T$ für $s_B < s_i < s_1$ bestimmen wir nun die kleinste obere Schranke von n . Die $m\pi$ -Durchgänge der Phase im elastischen Gebiet und die Nullstellen von $\text{Re } T$ ergeben sich beide aus $\bar{N} = 0$. $\bar{N}$ ist ein Polynom ersten Grades.

$$(2\sqrt{s_2} g_{11} + \tilde{g}) \cdot s - 2s_2 \tilde{g} = 0, \quad s_B < s < s_2 \quad (34)$$

13. Warnock, R. L.: Phys. Rev. **131**, 1320 (1965).

mit der Abkürzung $\tilde{g} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$. Oberhalb der inelastischen Schwelle zählen wir mittels (32) die $m\pi/2$ -Durchgänge der Phase. $\operatorname{Re} \bar{N} \cdot \operatorname{Re} \bar{D} + \operatorname{Im} \bar{N} \cdot \operatorname{Im} \bar{D}$ ist ein Polynom zweiten Grades

$$c_0 s^2 - 2c_1 s + c_2 = 0, \quad s \geq s_2 \quad (35)$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= 8\sqrt{s_1 s_2} g_{11} + 4s_2 g_{11}^2 + 4\sqrt{s_1 s_2} g_{11} g_{22} + 4\sqrt{s_1 s_2} \tilde{g} \\ &\quad + 2\sqrt{s_1} \tilde{g} g_{22} + 4\sqrt{s_2} g_{11} \tilde{g} + \tilde{g}^2, \\ c_1 &= 4s_1 s_2 g_{11}^2 + 4\sqrt{s_1 s_2} s_2 g_{11} g_{22} + 4\sqrt{s_1 s_2} \tilde{g} \\ &\quad + 4\sqrt{s_2} s_1 g_{11} \tilde{g} + 4\sqrt{s_2} s_2 g_{11} \tilde{g} + s_2 \tilde{g}^2, \\ c_2 &= 16s_1 \sqrt{s_2} s_2 g_{11} \tilde{g}. \end{aligned}$$

Im asymptotischen Bereich gilt

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{4\sqrt{s_1}(2\sqrt{s_2} g_{11} + \tilde{g})}{4\sqrt{s_1 s_2} + 2\sqrt{s_2} g_{11} + 2\sqrt{s_1} g_{22} + \tilde{g}} \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Nach Voraussetzung ist $g_{11} \geq 0, g_{22} \geq 0$. Für $\tilde{g} > 0$ – eine Einschränkung, die wir später rechtfertigen – geht δ von oben gegen $m\pi$. Da δ für $s < s_2$ wegen (34) höchstens einen $m\pi$ -Durchgang hat, ist $\delta(s_2) < (-n_B + 2)\pi$. Wegen (35) hat δ für $s \geq s_2$ höchstens je einen weiteren $m\pi$ - und $(2m+1)\pi/2$ -Durchgang, daher ist $\delta < (-n_B + 3)\pi$ und $n=2$ ist obere Schranke. Tatsächlich tritt der Wert $n=2$ nicht auf. Für $\delta(\infty) = (-n_B + 2)\pi$ ist notwendig $\delta(s_2) > (-n_B + 1)\pi$. Aus

$$\operatorname{tg} \delta(s_2) = \frac{2\sqrt{s_1}\sqrt{s_2 - s_1}(2\sqrt{s_2} g_{11} - g_{11} g_{22} + g_{12}^2)}{2\sqrt{s_1 s_2}(2\sqrt{s_2} - g_{22}) + (s_2 - 2s_1)(2\sqrt{s_2} g_{11} - g_{11} g_{22} + g_{12}^2)}$$

folgt, daß $\delta(s_2)$ mit g_{22} monoton anwächst und $\delta(s_2) > (-n_B + 1)\pi$, wenn

$$g_{22} > \hat{g}_{22} := 2\sqrt{s_2} + \frac{g_{12}^2}{g_{11}}.$$

Für $g_{22} > \hat{g}_{22}$ ist $\tilde{g} > 0$, d.h. die Streuphase geht von oben gegen $m\pi$. Um zu zeigen, daß für $g_{22} > \hat{g}_{22}$ die Streuphase oberhalb der inelastischen Schwelle keinen weiteren $m\pi$ -Durchgang hat, schreiben wir (35) in die Variable $(s - s_2)$ um.

$$c_0(s - s_2)^2 - 2(c_1 - s_2 c_0)(s - s_2) + c_3 c_4 = 0, \quad (36)$$

wobei

$$\begin{aligned} c_3 &= g_{11} g_{22} - g_{12}^2 - 2\sqrt{s_2} g_{11}, \\ c_4 &= 2\sqrt{s_1} s_2 (g_{22} - 2\sqrt{s_2}) + (s_2 - 2s_1) c_3. \end{aligned}$$

Mit der Einschränkung $s_2 > 2s_1$ des Wertebereiches von s_2 ist der Beweis besonders einfach. Für $g_{22} > \hat{g}_{22}$ ist $c_0, c_3 > 0$, für $s_2 > 2s_1$ ist auch $c_4 > 0$,

dann ist

$$(s_I - s_2)(s_{II} - s_2) > 0. \quad (37)$$

Dabei sind s_I, s_{II} die beiden Nullstellen von (35). Nun geht $s_I \rightarrow 0$ für $g_{22} \rightarrow \infty$ und $s_I < s_2$ für $g_{22} > \hat{g}_{22}$. Wegen (37) ist daher $s_{II} < s_2$ für $g_{22} > \hat{g}_{22}$. Also ist $n=1$ kleinste obere Schranke. Das Resultat sollte auch für $s_2 < 2s_1$ gelten, da diese Einschränkung nicht von der Dynamik des Modells abhängt. Für $s_2 < 2s_1$ ist $\delta(s_2) > (-n_B + 3/2)\pi$ möglich, die Nullstelle von (35) oberhalb der inelastischen Schwelle ist dann ein $(-n_B + 3/2)\pi$ -Durchgang der Streuphase. Abgesehen von der speziellen Lösung $\eta(\bar{s})=0$ konvergieren die Integrale (10) für dieses Modell, und es gilt das Levinsontheorem. Da n die Werte 0,1 annimmt, ist im F.W.-Verfahren kein oder ein CDD-Pol zu berücksichtigen.

Aus der Diskussion der Nullstellen s_j von (34) bzw. (35) ist bekannt, daß für $g_{22} > \hat{g}_{22}$ gilt: Entweder hat $\sin \delta$ oder $\text{Re } T(s_B < s_j < s_1)$ eine einzige Nullstelle. Sie liegt unterhalb der inelastischen Schwelle. Die Streuphase geht von oben gegen $(-n_B + 1)\pi$. Für $g_{22} \leq \hat{g}_{22}$ hat (34) keine Nullstelle im Bereich $s < s_2$. Da (35) ein Polynom zweiten Grades ist, und die Streuphase für $n=1$ — wie im Fall $g_{22} > \hat{g}_{22}$ — von oben gegen $(-n_B + 1)\pi$ geht, hat $\sin \delta$ höchstens eine Nullstelle oberhalb der inelastischen Schwelle. Da jeweils höchstens eine Nullstelle auftritt, ist die Zuordnung der Polstelle zu den $m\pi$ -Durchgängen der Streuphase bzw. den Nullstellen von $\text{Re } T$ unterhalb der elastischen Schwelle eindeutig.

Um die Aussage über die dynamische Ursache des CDD-Poles zu gewinnen, untersuchen wir den Wertebereich W von g_{22} und g_{12} , für den ein CDD-Pol auftritt. Grenzen von W ergeben sich aus der Bedingung, daß der Elastizitätsgrad verschwindet, und dessen Nullstelle auf dem oberen Ufer des inelastischen Schnittes liegt. In den Größen $\bar{N}, \bar{D}$ hat die Bedingung $\eta=0$ nach (29) die Form

$$2\rho_1 \text{Re } \bar{N} + \text{Im } \bar{D} = 0,$$

$$2\rho_1 \text{Im } \bar{N} - \text{Re } \bar{D} = 0.$$

Für das Modell folgt mittels (31)

$$\rho_1(g_{11} - \tilde{g} \text{Re } \varphi_2) - \rho_2(g_{22} - \tilde{g} \text{Re } \varphi_1) = 0, \quad (38)$$

$$1 - g_{11} \text{Re } \varphi_1 - g_{22} \text{Re } \varphi_2 + \tilde{g} \text{Re } \varphi_1 \text{Re } \varphi_2 + \rho_1 \rho_2 \tilde{g} / \bar{s}^2 = 0. \quad (39)$$

Neben der Bestimmungsgleichung für die Nullstelle $\bar{s}$ von η liefert $\eta=0$ noch eine Bedingung für die Kopplungskonstanten, die wir in der impliziten Form $g_{22} = \tilde{g}_{22}(g_{11}, g_{12}, s_1, s_2)$ schreiben. Durch Elimination von g_{11} aus (38) und (39) ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für $\bar{s}$:

$$\sum_{i=0}^3 d_i \bar{s}^{3-i} \quad (40)$$

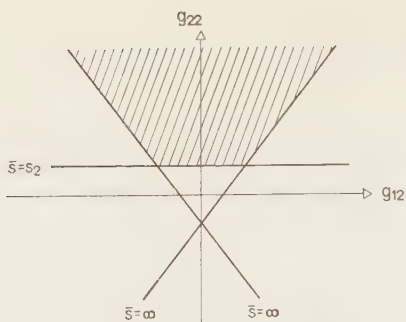


Fig. 2. Der Wertebereich der Kopplungskonstanten g_{12}, g_{22} für die Lösung mit CDD-Pol

mit

$$\begin{aligned} d_0 &= g_{12}^4 / 16 s_1^2 - (1 + g_{22} / 2\sqrt{s_2})^4, \\ d_1 &= s_1(1 + g_{22} / 2\sqrt{s_2})^4 + 4\sqrt{s_2}(1 + g_{22} / 2\sqrt{s_2})^2 g_{22} - s_2 g_{12}^4 / 16 s_1^2, \\ d_2 &= -4s_1\sqrt{s_2}(1 + g_{22} / 2\sqrt{s_2})^2 g_{22} - 4s_2 g_{12}^2, \\ d_3 &= 4s_1 s_2 g_{22}^2. \end{aligned}$$

Sie ist geeignet für die Bestimmung des Wertebereiches W . $\bar{s}$ soll größer als die inelastische Schwelle sein. Mit $\bar{s} = s_2$ ergibt sich aus Gl. (40) die Grenze $g_{22} = 2\sqrt{s_2}$. Außerdem soll $\bar{s}$ auf dem physikalischen Blatt liegen. Aus $s \rightarrow \infty$ folgt eine zweite Grenze $g_{22} = \pm \sqrt{s_2} \cdot g_{12} / \sqrt{s_1} - 2\sqrt{s_2}$. Da der elastische Grenzfall $g_{12} = g_{22} = 0$ außerhalb von W liegt, umfaßt W das Gebiet

$$g_{22} \geq 2\sqrt{s_2}, \quad |g_{12}| \leq \frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s_2}} g_{22} + 2\sqrt{s_1} \quad (41)$$

der Fig. 2. Zunächst ist W der Wertebereich von g_{12}, g_{22} für einen CDD-Pol mit verschwindendem Residuum. Da der Wertebereich für wachsendes g_{22} unbegrenzt ist, sollte W auch Wertebereich für den CDD-Pol mit nichtverschwindendem Residuum sein. Dann ist (41) eine notwendige Bedingung für die Existenz des CDD-Poles. Nun existiert für $g_{22} > 2\sqrt{s_2}$ bei Entkopplung der Kanäle ($g_{12} = 0$) ein gebundener Zustand im zweiten Kanal. Die Existenz dieses gebundenen Zustandes ist also notwendige Bedingung für die Existenz des CDD-Poles. Obwohl für $2\sqrt{s_2} < g_{22} < \bar{g}_{22}$ ein gebundener Zustand und kein CDD-Pol existiert, und die Definition des gebundenen Zustandes für $g_{12} \neq 0$ abgeändert werden muß, erscheint es gerechtfertigt, den gebundenen Zustand im zweiten Kanal als dynamische Ursache des CDD-Poles anzusehen.

Die Annahmen des Modells und die Lösung (31) der Dispersionsrelationen sind bereits für n Streukanäle angeschrieben. Wegen der Gleich-

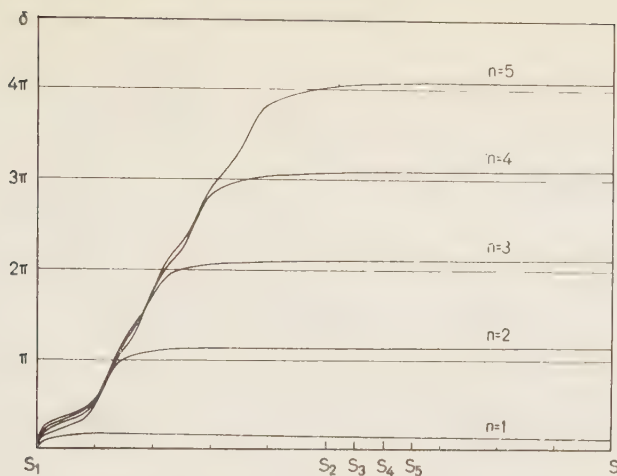


Fig. 3. Die Streuphase im Modell der n Kanalstreuung ($n_B=0$)

berechtigung der Kanäle sollte für n Streukanäle eine Verallgemeinerung der Resultate der Zweikanalstreuung möglich sein. Bei Entkopplung aller Kanäle $g_{ik}=0$ ($i \neq k$) tritt in jedem Streukanal ein gebundener Zustand auf, wenn $g_{ii} > 2\sqrt{s_i}$. Für $g_{ii} \geq 2\sqrt{s_i}$ ($i=2 \dots n$) existiert eine Lösung mit $\delta(\infty) = (-n_B + n - 1)\pi$ (Fig. 3). Daher sind im F.W.-Verfahren $n-1$ CDD-Pole zu berücksichtigen. Im betrachteten Modell besteht eine enge Verknüpfung zwischen dem gebundenen Zustand in einem angekoppelten Kanal und einem CDD-Pol. Da der CDD-Pol und der gebundene Zustand Strukturen der Lösung sind, sollte eine ähnliche Verknüpfung auch in anderen Modellen bestehen. Somit erscheint eine weitere Verallgemeinerung gerechtfertigt: Für die Klasse der Modelle der n -Kanalstreuung, die bei Entkopplung aller Kanäle einen gebundenen Zustand in jedem Kanal beschreiben, sind im F.W.-Verfahren $n-1$ CDD-Pole zu berücksichtigen.

VI. Nachwort

Über die Bedeutung des CDD-Poles gibt es zwei extreme Vorstellungen. Einmal versteht man den CDD-Pol als Mehrdeutigkeit der Lösung einer mathematischen Aufgabe. Die Streuamplitude ist durch die Forderung der Regularität und Unitarität nicht eindeutig bestimmt. Die Mehrdeutigkeit ist eine Summe von CDD-Polen. Vom Standpunkt der praktischen Rechnung ergibt sich eine zweite Sicht. Die Anzahl der CDD-Pole, deren Polstellen und Residuen sind Parameter der Rechnung, die an den Daten angepaßt werden. Der Einfachheit halber berücksichtigt man immer nur eine minimale Anzahl von CDD-Polen.

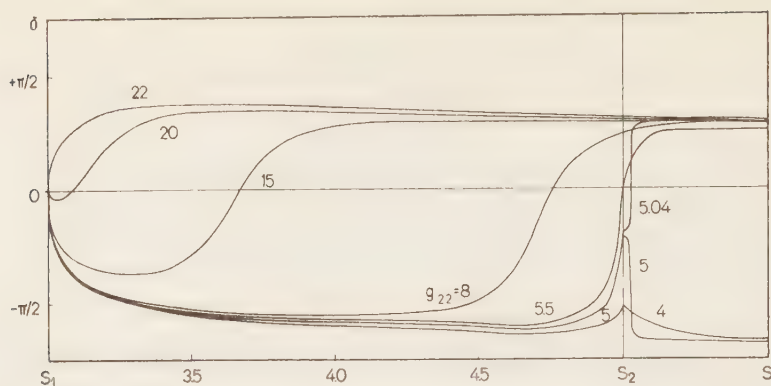


Fig. 4. Die Streuphase im Modell der Zweikanalstreuung ($n_B=1$)

In dieser Arbeit diskutieren wir eine spezielle Klasse von CDD-Polen, die einige Bedeutung für die Berechnung experimenteller Streuphasen hat¹². Es ist die Klasse der CDD-Pole infolge angekoppelter inelastischer Kanäle. Selbstverständlich können wir eine andere Erklärung der CDD-Pole in der Einkanalstreuung nicht ausschließen, doch sehen wir keine Notwendigkeit, eine weitere Klasse von CDD-Polen für die Beschreibung der vorliegenden experimentellen Daten zu fordern.

Zur Frage der Mehrdeutigkeit der Streuamplitude ergibt sich: Die Anzahl der CDD-Pole hängt von der Anzahl der angekoppelten Kanäle ab, und zwar nimmt die Anzahl der CDD-Pole ab, wenn die Zahl der Kanäle größer wird. Für die Klasse der Modelle der n Kanalstreuung, die bei Entkopplung aller Kanäle einen gebundenen Zustand in jedem Kanal beschreiben, ergibt sich: Existieren im n Kanalverfahren keine CDD-Pole, so sind im Einkanalverfahren $n-1$ CDD-Pole zu berücksichtigen.

Für die praktische Rechnung folgt aus dem betrachteten Modell (Fig. 4): Die dynamische Ursache des CDD-Poles ist ein gebundener Zustand in einem angekoppelten Kanal ($g_{22} > 4,5$). Ist dessen Kopplungskonstante klein ($g_{22} \approx 5$), so liegt die Polstelle nahe oberhalb der Schwelle des betreffenden Kanals. Für wachsende Kopplungskonstante rückt die Polstelle nach kleineren Energien.

Mein Dank gilt Herrn Professor F. Penzlin für manch hilfreiche Diskussion. Der Studienstiftung Volkswagenwerk danke ich für die finanzielle Förderung der Arbeit.

Dipl.-Phys. Eberhard Tränkle
Institut für Theoretische Physik
der Freien Universität Berlin
1000 Berlin 33, Boltzmannstraße 20

Lebenslauf:

Am 20. Oktober 1937 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Albert Tränkle und seiner Ehefrau Maria, geb. Löhr, in Stuttgart geboren.

Dort besuchte ich mit einigen Unterbrechungen infolge des Krieges die Schule und bestand im März 1957 das Abitur im Gymnasium Stuttgart-Vaihingen.

Nach einem halbjährigen Praktikum bei Zeiss Ikon immatrikulierte ich mich an der TH Stuttgart, war im 5. und 6. Semester an der TU Berlin und schloß im September 1964 das Studium mit der Diplomhauptprüfung in Physik an der TH Stuttgart ab.

Mit einem Promotionsstipendium der Studienstiftung Volkswagenwerk kam ich an die FU Berlin und arbeite am Institut für Theoretische Physik auf dem Gebiet der Elementarteilchenphysik.

Im Februar 1966 heiratete ich Frau Ingeborg Tränkle, geb. Fitzek; im April 1967 wurde unsere Tochter Marion geboren.

